$\Rightarrow \quad f(x)-S_n(x)=(-1)^{n+1}f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}$

$\Rightarrow \quad \int^2 f(x).dx-\int^2 S_n(x).dx$

$=\int^2(-1)^{n+1}f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

$\Rightarrow \quad \int^2 f(x).dx-\int_1^2[\,1-\frac{\ln x}{x}+(\frac{\ln x}{x})^2+$

...

$..+(-1)^n(\frac{\ln x}{x})^n\,].dx =$

$\int^2(-1)^{n+1}f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

$\Rightarrow \quad \int^2 f(x).dx-(1-U_1+U_2-.....$

$+(-1)^n U_n)=\int^2(-1)^{n+1}f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

$\Rightarrow \quad I-I_n=\int^2(-1)^{n+1}f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

b) $k(x)=\frac{\ln x}{x}\;;x>0$

$k'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$

x	0		e		$+\infty$
f'(x)		+	0	−	
f(x)		↗	1/e	↘	

k admet $\frac{1}{e}$ comme maximum absolu sur $]0,+\infty[$

$\Rightarrow \quad k(x)\le\frac{1}{e}$, pour tout $x\in\ ]0,+\infty[$

$\Rightarrow \quad \frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e}$, pour tout $x\in\ ]0,+\infty[$

$|\,I-I_n\,|=|\int^2(-1)^{n+1}f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx\,|$

$|\int^2 f(x).(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx\,|\le$

$\int^2|f(x)|.(\frac{\ln x}{x})^{n+1}.dx$

$\Rightarrow \frac{2}{2+\ln 2}\le f(x)\le 1\Rightarrow |f(x)|\le 1$

D'où $\int^2|f(x)|.dx\le\int^2 dx=1$

, et par suite : $|\,I-I_n\,|\le\frac{1}{e^{n+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e^{n+1}}=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}I_n-I=0\Rightarrow\lim I_n=I$

d) $|\,I-I_2\,|\le\frac{1}{e^3}\Rightarrow-\frac{1}{e^3}\le I-I_2\le\frac{1}{e^3}$

$\Rightarrow I_2-\frac{1}{e^3}\le I\le I_2+\frac{1}{e^3}$

d'où $\boxed{I_2-\frac{1}{e^3}\le I\ (1)}$

d'après 4°) a) :

$I-I_2=\int^2-f(x).(\frac{\ln x}{x})^3.dx\le 0$

car $-f(x)(\frac{\ln x}{x})^3\le 0,\ \forall x\in[\,1\,,2\,]$

d'où $\boxed{I\le I_2\ (2)}$

(1) + (2) $\Rightarrow \quad I_2-\frac{1}{e^3}\le I\le I_2$

Partie D $\quad F(x)=\int^{e^x} f(t).dt$

1) la fonction u: $x\to e^x$ est dérivable sur IR_+

et $u(IR_+)=[1\,,+\infty[$ et $1\in\ [1\,,+\infty[$

comme f est continue sur $[1\,,+\infty[$

alors F est dérivable sur IR_+

et on a $F'(x)=u'(x).f(u(x))=e^x f(e^x)\quad F'(x)=e^x$.

$\frac{e^x}{x+e^x}=\frac{e^{2x}}{x+e^x}$

2) f admet $\frac{e}{e+1}$ comme minimum absolu sur $[1,+\infty[$

$\Rightarrow f(t)\ge\frac{e}{e+1}\ge\frac{1}{2},\forall\, t\in[1,+\infty[$

3) $f(t)\ge\frac{1}{2}\qquad\forall\, t\in\ [\,1\,,+\infty[$

et $e^x\ge 1\ \forall x\in IR_+$

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn